Grundlagen sportwissenschaftlicher Forschung
Inferenzstatistik 2

Dr. Jan-Peter Brückner

jpbrueckner@email.uni-kiel.de

R.216
Tel. 880 4717

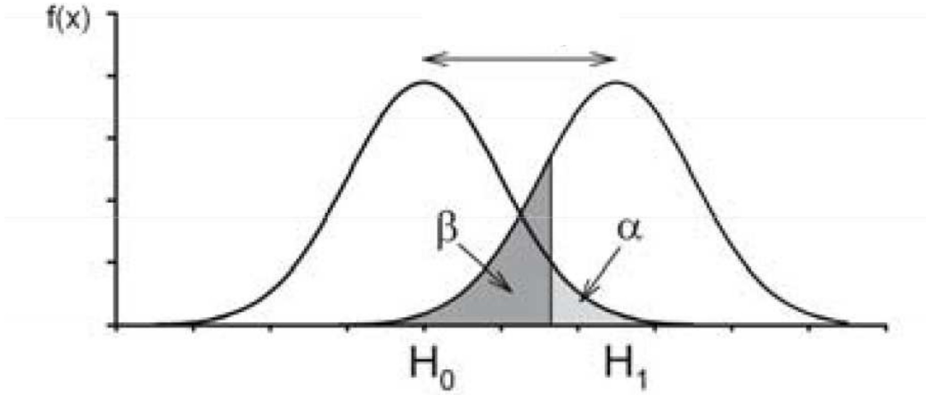
Statistischer Schluss

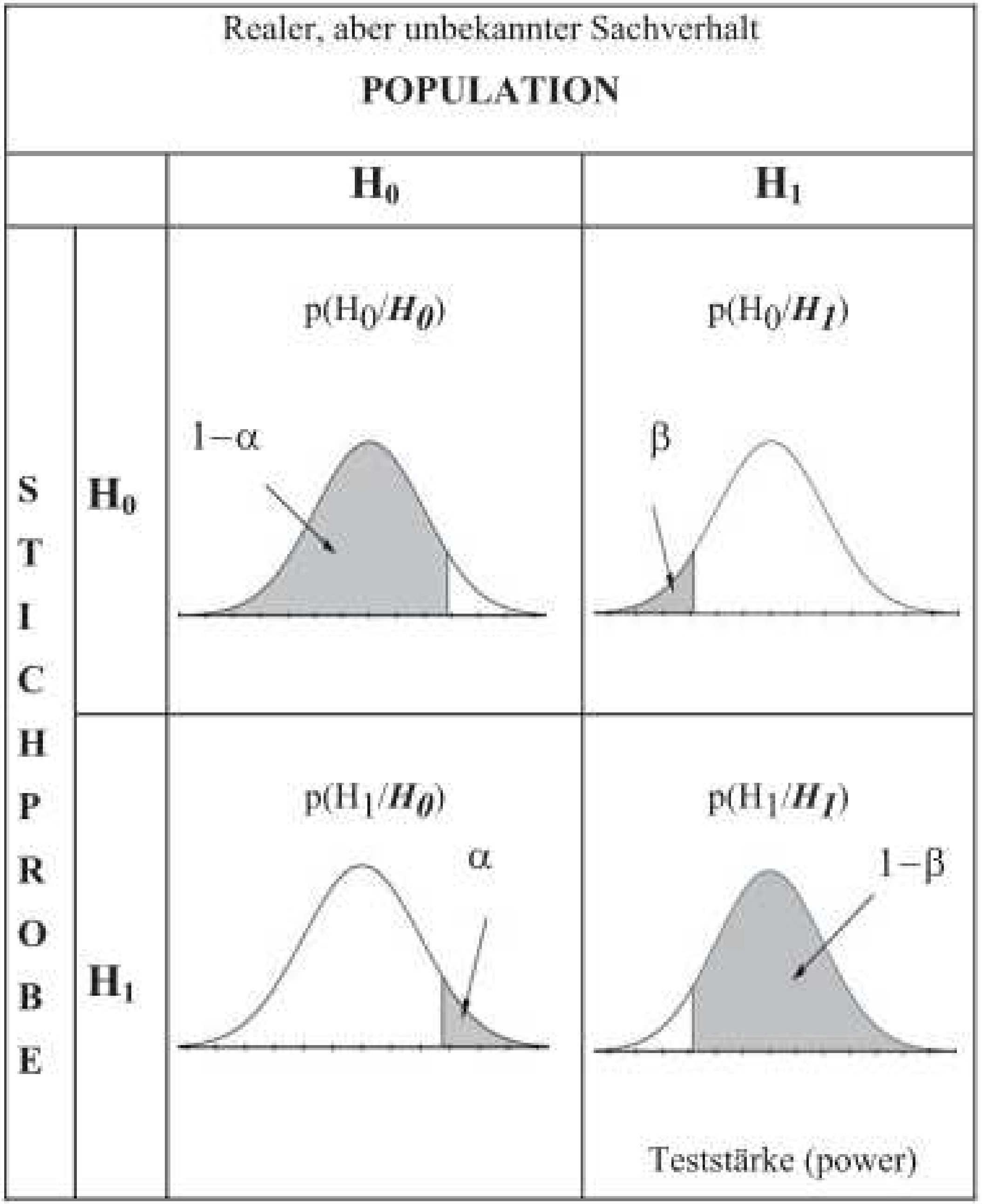
- Voraussetzungen z.B. bzgl. Skalenniveau und Verteilungseigenschaften der Variablen
- Spezifische Annahme bezogen auf die Grundgesamtheit (→ Nullhypothese H_0)
- Festlegen einer Irrtumswahrscheinlichkeit α
- Stichprobe: Berechnung einer spezifischen Prüfstatistik
- Berechnung der Auftretenswahrscheinlichkeit p der Prüfstatistik (und damit der Daten) unter der Nullhypothese H_0
  Oder:
- Prüfen, ob Prüfstatistik einen kritischen Wert überschreitet

→ Hypothesenentscheidung: H_0 oder H_1

Fehler bei Hypothesenentscheidungen

	In Wirklichkeit gilt die H_0	In Wirklichkeit gilt die H_1
Entscheidung zugunsten der H_0	Richtige Entscheidung	**β-Fehler**
Entscheidung zugunsten der H_1	**α-Fehler**	Richtige Entscheidung





Realer, aber unbekannter Sachverhalt
POPULATION
H_0
H_1
STICHPROBE
H_0
$p(H_0/\boldsymbol{H_0})$
$1-\alpha$
$p(H_0/\boldsymbol{H_1})$
β
H_1
$p(H_1/\boldsymbol{H_0})$
α
$p(H_1/\boldsymbol{H_1})$
$1-\beta$
Teststärke (power)

Testen von Unterschiedshypothesen

Beispiel 4 (→ Untersuchungsplanung)

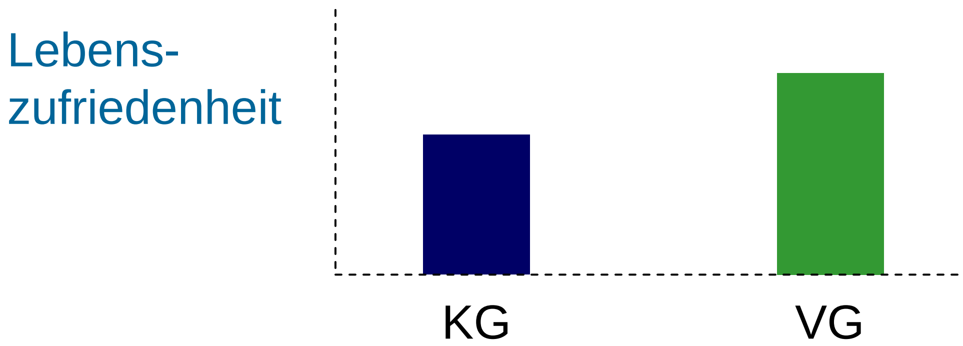
Forschungshypothese:

Personen, die ein bestimmtes Trainingsprogramm absolviert haben, haben eine höhere Lebenszufriedenheit als Personen, die kein Training machen.

Methode:

- Die Versuchsgruppe (VG) absolviert ein 6-wöchiges Trainingsprogramm
- Die Kontrollgruppe (KG) absolviert kein Training.

Ergebnis:



Interpretation?

Beeinflusst Sporttreiben die Lebenszufriedenheit?

t-Test für unabhängige Stichproben

Der t-Test prüft für zwei Stichproben mit den Erwartungswerten μ_1 und μ_2 die Nullhypothese:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

Mittelwerte auf Populationsebene

t-Test für unabhängige Stichproben

t-Wert:

Verhältnis der Mittelwertsdifferenz
zur gewichteten Stichprobenvarianz

$$t = \frac{M_1 - M_2}{SD_{1,2}}$$

$$SD_{1,2} = \sqrt{\frac{(n_1 - 1) \times SD_1^2 + (n_2 - 1) \times SD_2^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)} \times \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}$$

t-verteilt mit df = $n_1 + n_2 - 2$

Freiheitsgrade

degrees of freedom (df)

Zahl der frei „wählbaren“ („variierbaren“) Einzelinformationen bei der Berechnung eines Parameters.

Wie viele Einzelwerte kann ich frei verändern, wenn ein Parameter/ statistischer Kennwert (z.B. der Mittelwert) bereits feststeht?

t-Test für unabhängige Stichproben

Für intervallskalierte X und Y ist der t-Wert
unter Annahme:

1. gleicher Erwartungwerte von X und Y $\dashrightarrow H_0 : \mu_1 = \mu_2$
2. der Normalverteilung von X und Y
3. gleicher Varianzen von X und Y

t-verteilt mit n+m-2 Freiheitsgraden.

Wenn keine Varianzhomogenität vorliegt müssen die Freiheitsgrade korrigiert werden:

$$\mathrm{df}_{\mathrm{corr}} = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{s_1^4}{n_1^2(n_1-1)} + \frac{s_2^4}{n_2^2(n_2-1)}}$$

(Bortz & Schuster, 2010, S. 123)

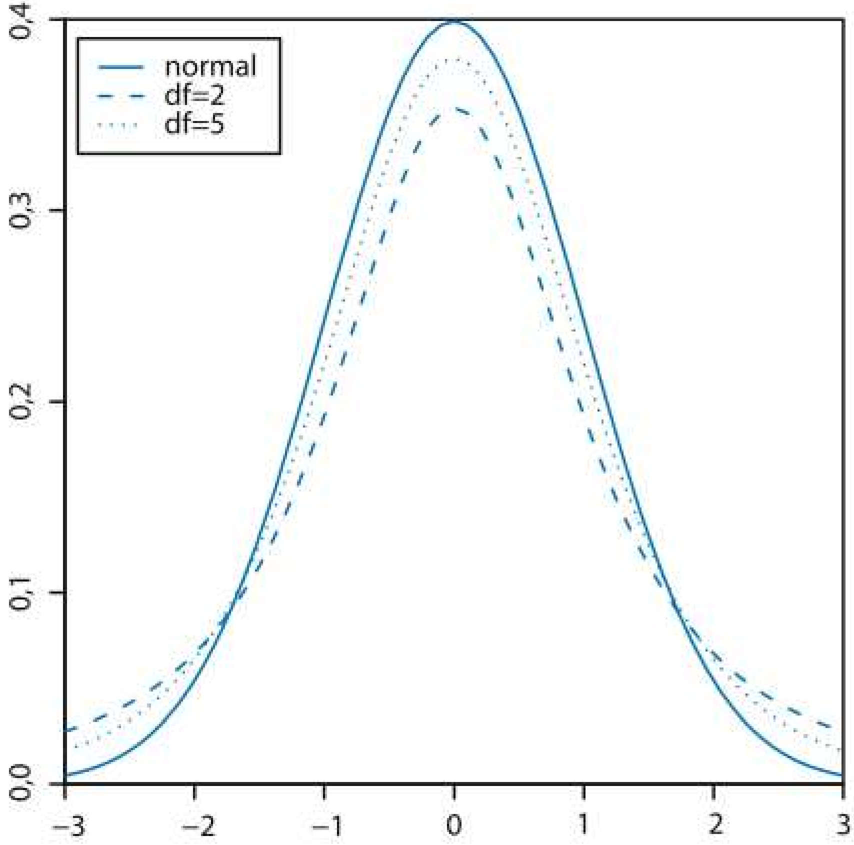


Abbildung 5.11. *t*-Verteilungen im Vergleich zur Normalverteilung

(Bortz & Schuster, 2010, S. 75)

SPSS-Beispiel

Group Statistics

	Gruppe	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Lebenszufriedenheit	1,00	20	3,3000	1,65752	,37063
	2,00	20	3,5500	2,08945	,46721

Independent Samples Test

		Levene's Test for Equality of Variances				
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)
Lebenszufriedenheit	Equal variances assumed	4,413	,042	-,419	38	,677
	Equal variances not assumed			-,419	36,130	,678

t-test for Equality of Means			
		95% Confidence Interval of the Difference	
Mean Difference	Std. Error Difference	Lower	Upper
-,25000	,59637	-1,45729	,95729
-,25000	,59637	-1,45934	,95934

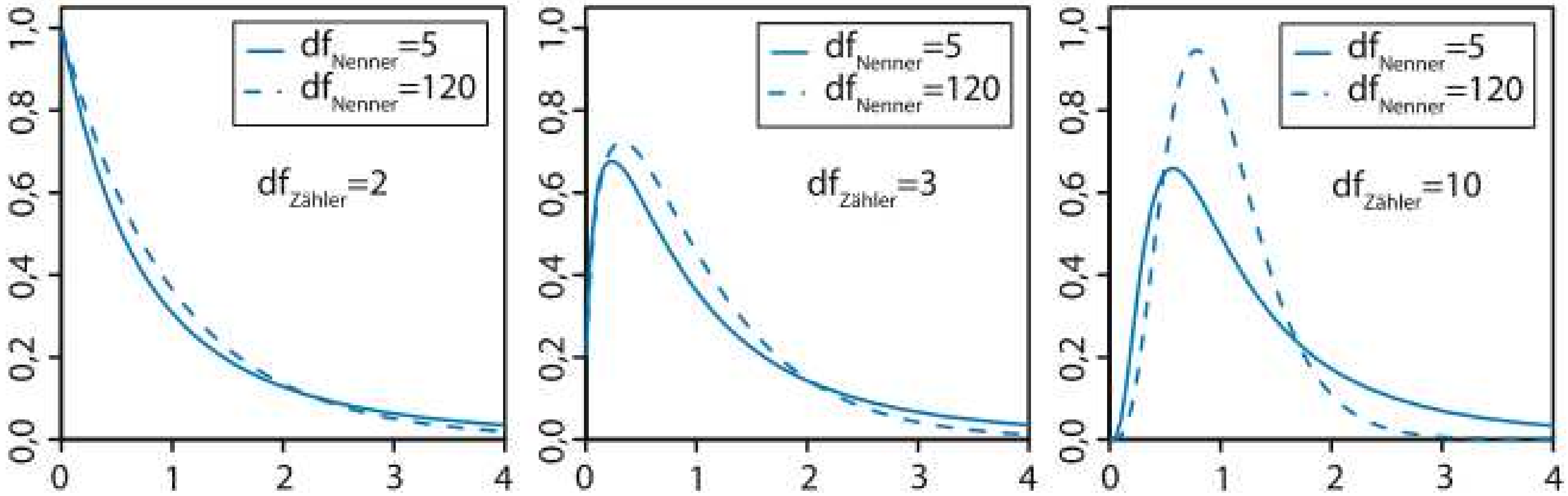


Abbildung 5.12. Dichtefunktionen von *F*-Verteilungen für verschiedene Kombinationen von Zähler- und Nennerfreiheitsgraden

(Bortz & Schuster, 2010, S. 76)

t-Test für abhängige Stichproben

Bei zwei verbundenen oder abhängigen Stichproben sind die Objekte einander paarweise zugeordnet.

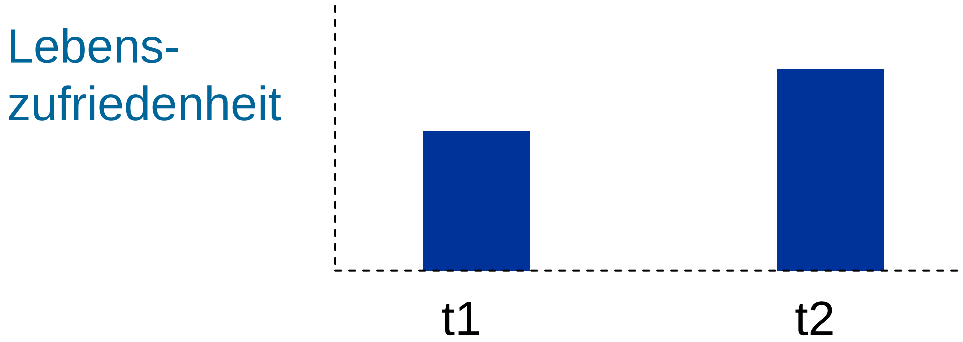
Verbundene oder abhängige Stichproben liegen auch vor, wenn jedes Beobachtungsobjekt wiederholt untersucht wird.

Beispiel

Forschungshypothese:

Personen, die ein bestimmtes Trainingsprogramm absolviert haben, haben hinterher eine höhere Lebenszufriedenheit als vorher.

Ergebnis:



Unterscheidet sich die Lebenszufriedenheit zwischen t1 und t2?

t-Test für abhängige Stichproben

Der t-Test für abhängige Stichproben prüft für zwei abhängige Stichproben die Nullhypothese:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

Durch die paarweise Zuordnung der Stichproben mit $d_i = x_{i1} - x_{i2}$

entspricht dies der Nullhypothese:

$$H_0 : \mu_d = 0$$

t-Test für abhängige Stichproben

$$t = \sqrt{n}\left(\frac{\bar{d}}{s_d}\right)$$

mit:

$$\bar{d} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$$

$$d_i = x_{i1} - x_{i2}$$

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i - \bar{d})^2}{n-1}}$$

t-verteilt mit df = n-1 Freiheitsgraden

Voraussetzungen:

Intervallskalierung und Normalverteilung
von X und Y

Für n<30: Normalverteilung der Differenzen

SPSS-Beispiel

Paired Samples Statistics

		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	Lebenszufried_1	3,3000	20	1,65752	,37063
	Lebenszufried_2	3,9500	20	1,23438	,27601

Paired Samples Correlations

		N	Correlation	Sig.
Pair 1	Lebenszufried_1 & Lebenszufried_2	20	,831	,000

Paired Samples Test

		Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
					95% Confidence Interval of the Difference				
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	Lower	Upper			
Pair 1	Lebenszufried_1 - Lebenszufried_2	-,65000	,93330	,20869	-1,08680	-,21320	-3,115	19	,006

Alternative Verfahren

bei Ordinalskalierung und/oder

Abweichung von Normalverteilung

→ U-Test oder Wilcoxon-Test

bei multiplen Mittelwertsvergleichen
vermeiden der α-Fehler-Kumulierung
durch
→ Varianzanalyse (ANOVA)

Testen von Verteilungsanpassungen

χ^2-Anpassungstest

„Goodness-of-fit-Test“

→ Testet, ob eine Zufallsvariable X einer vorgegebenen Verteilung folgt.

z.B. Normalverteilung, Gleichverteilung oder einer theoretisch begründeten Verteilung

χ^2-Anpassungstest

Beispiel:

40 Trainer werden befragt, welche Dehnungsmethode sie bevorzugt anwenden:

1. Aktiv-dynamisches Dehnen (AD)
2. Aktiv-statisches Dehnen (AS)
3. Passiv-dynamisches Dehnen (PD)
4. Passiv-statisches Dehnen (PS)

χ^2-Anpassungstest

Ergebnis der Befragung:

X	AD	AS	PD	PS
h(X)	13	11	7	9

Kann man davon ausgehen, dass alle Methoden gleichhäufig bevorzugt werden?
(D.h: Sind die Abweichungen von der Gleichverteilung nur zufällig?)

$\rightarrow$ χ^2 *-Test auf Gleichverteilung*

Nullhypothese:
In der Grundgesamtheit sind alle Ausprägungen gleichhäufig.

χ^2-Anpassungstest

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left[h(beob.)_i - h(erw.)_i\right]^2}{h(erw.)_i}$$

χ^2 *- verteilt mit k-1 Freiheitsgraden*

Beispiel:

Für alle i gilt $h(erwartet)_i = 40/4 = 10$

$$\chi^2 = \frac{(13-10)^2}{10} + \frac{(11-10)^2}{10} + \frac{(7-10)^2}{10} + \frac{(9-10)^2}{10}$$

$$= \frac{3^2}{10} + \frac{1^2}{10} + \frac{(-3)^2}{10} + \frac{(-1)^2}{10} = 2$$

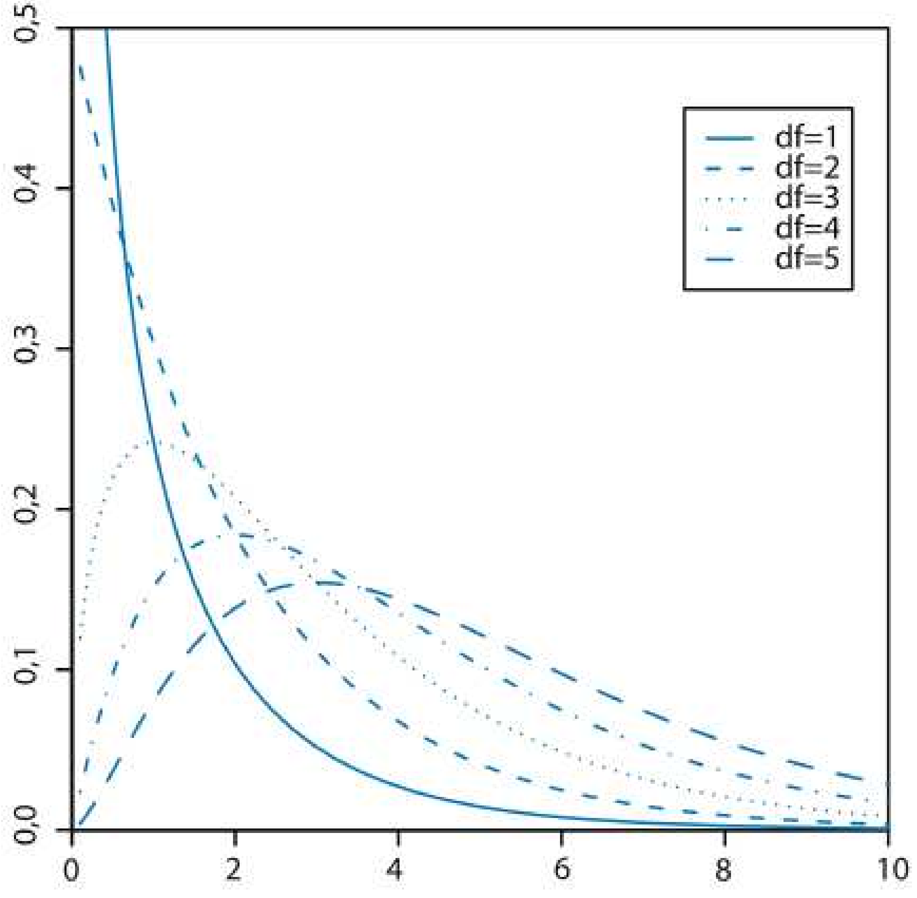


Abbildung 5.10. Dichtefunktionen verschiedener χ^2-Verteilungen

(Bortz & Schuster, 2010, S. 75)

χ^2-Anpassungstest

Ausgewählte kritische χ^2-Werten der unterschiedlichen Freiheitsgrade für das 5%-Signifikanzniveau

k-1	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	30	40	50
χ^2	3,8	6,0	7,8	9,5	11,1	12,6	15,5	18,3	25,0	31,4	43,8	55,8	67,5

$\chi^2 \geq \chi^2_{krit}$, dann H_1 annehmen, **sonst H_0 beibehalten**

$\chi^2 = 2 \rightarrow H_0$ beibehalten

SPSS-Beispiel

Chi-Square Test

Frequencies

Methode

	Observed N	Expected N	Residual
1,00	13	10,0	3,0
2,00	11	10,0	1,0
3,00	7	10,0	-3,0
4,00	9	10,0	-1,0
Total	40		

Test Statistics

	Methode
Chi-Square	2,000[a]
df	3
Asymp. Sig.	,572

a. 0 cells (,0%) have expected frequencies less than 5. The minimum expected cell frequency is 10,0.

Aufgaben

Teil 1

Interpretiere den Computerausdruck zum Test auf Gleichverteilung:

Zugunsten welcher Hypothese fällt die Hypothesenentscheidung aus?

Gib den Rechenweg zur Berechnung der Chi²-Statistik an.

Chi-Square Test

Frequencies

Methode2

	Observed N	Expected N	Residual
1,00	15	10,0	5,0
2,00	14	10,0	4,0
3,00	2	10,0	-8,0
4,00	9	10,0	-1,0
Total	40		

Test Statistics

	Methode2
Chi-Square	10,600[a]
df	3
Asymp. Sig.	,014

a. 0 cells (,0%) have expected frequencies less than 5. The minimum expected cell frequency is 10,0.

Aufgaben

Teil 2

Bei zwei Gruppen wird die Fitness mit einem Fitnesstest gemessen.

Interpretiere den nachfolgenden Computerausdruck eines t-Tests:

Wie heißt die Nullhypothese?
Wie heißt die Alternativhypothese?

Zugunsten welcher Hypothese fällt die Hypothesenentscheidung aus?
Begründe die Entscheidung!

Abgabe bis Di, 19.06., 10:15 h

Group Statistics

	Gruppe	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Fitness	1,00	20	3,3000	1,65752	,37063
	2,00	20	4,6000	1,31389	,29380

Independent Samples Test

		Levene's Test for Equality of Variances				
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)
Fitness	Equal variances assumed	,835	,366	-2,749	38	,009
	Equal variances not assumed			-2,749	36,119	,009

t-test for Equality of Means			
		95% Confidence Interval of the Difference	
Mean Difference	Std. Error Difference	Lower	Upper
-1,30000	,47295	-2,25744	-,34256
-1,30000	,47295	-2,25908	-,34092